Étude du mouvement d'un projectile

Sébastien Roy

15 mai 2012

Le but de l'exercie est de déterminer la distance maximale que peut parcourir un projectile en connaissant sa masse, sa dimension et sa vitesse au moment du lancé. L'objet qui nous intéresse pour cet exercice est le projectile AR-1 ARWEN (lien). Les spécifications d'intérêts sont: sa masse: 0.078 kg, Son diamètre 0.04m et sa vitesse de propulsion initiale 74m/s.

Une première observation qui permet de valider cette présente analyse, quand à la spécification du manufacturier, est que l'énergie cinétique à la propulsion initiale est de 219J. Or si on calcule cette énergie cinétique, on trouve $\frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \times 0.078 \times 74^2 J = 214J$. Le résultat n'est pas significativement différent et ces différences pourraientt être attribuées à une erreur d'arrondissement dans les autres spécifications. Cela dit, le résultat obtenu ici est inférieur et donc les calculs qui suivent constituent une légère sous-estimation.

1 Cas sans frottement

Avant de pouvoir obtenir les résultats réalistes (i.e. qui tiennent compte de la résistance de l'air), il faut d'abord résoudre le problème sans friction. Il s'agit là d'un simple problème de calcul de trajectoire qu'on peut retrouver dans n'importe quel manuel d'introduction à la physique mécanique classique.

La solution de l'équation du mouvement (position x - y en fonction du temps) est:

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin(\theta)t + r_0\hat{y} + v_0 cos(x)t\hat{x} \tag{1}$$

Où g est l'accélération gravitationnelle (9.8 m/s), θ l'angle entre 0 et 90 degrés, r_0 la hauteur initiale et v_0 la vitesse initialle (74 m/s). Dans cette portion de l'analyse, la masse de l'objet ne contribue pas au même titre que cette fameuse expérience de la plume contre la roche dans le tube sous vide. Il s'agit d'une accélération et ainsi la prise de vitesse lors de la chute est indépendante de la masse. Il faut préciser ici que l'angle est celui par rapport au sol (que la trajectoire forme avec le sol).

L'équation ci-dessus est une équation *vectoriel*. Elle représente simplement deux quantités reliées entre elles: soit la vitesse dans la direction $\hat{x}$ (parallèlement au sol) et dans la direction $\hat{y}$ (perpendiculaire au sol). La somme de ces deux quantités représente l'angle que forme le projectile avec le sol selon le temps qui s'est écoulé depuis sa projection.

Pour connaître la distance en $\hat{x}$ (i.e. la portée), il faut savoir combien de temps il faut avant de toucher le sol. Donc calculer le temps pour que la grandeur selon $\hat{y}$ s'annulle.

Ainsi le temps de vol t_v s'obtient en trouvant les racines du polynôme:

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin(\theta)t + r_0 \tag{2}$$

Il s'agit de la grandeur de la vitesse perpendiculaire au sol. Le premier terme dans l'équation représente la chute de l'objet. Le second, la vitesse initiale dans cette direction. Elle sera positive si on lance l'objet vers le haut et négative sinon. Le dernier terme représente la hauteur depuis laquelle le projectile est lancé. La solution à ce polynôme est:

$$t_v = \frac{v_0}{g} sin(\theta) \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g} sin(\theta)\right)^2 + \frac{2r_0}{g}} \tag{3}$$

Il y a deux racines. Pour connaître la bonne, il s'agit de prendre l'angle 0 degré auquel cas nous devons obtenir un résultat positif (tir droit) donc c'est le signe positif (+) qui est celui de la bonne solution (plutôt que le signe négatif).

Maintenant, la distance maximal en x (portée) est:

$$r_x = v_0 cos(\theta) t_v \tag{4}$$

2 Prise en compte de la résistance de l'air.

Dans la section précédente, le cas sans friction, avec gravité, fut résolu. Dans cette section, exactement le contraire sera fait, c'est-à-dire que la section traitera du cas avec friction mais en l'absence de gravité.

La force de friction (ref wikipedia) s'exprime comme suit:

$$F = -\frac{\gamma c_d A}{2m} v^2 = m\frac{dv}{dt} \tag{5}$$

où A la surface du projectile, c_d, le coefficient de drag pour le projectile et γ est la densité de l'air (environ 1.2 kg/m^3) et m, la masse du projectile.

Le coefficient de drag utilisé ici sera celui du cylindre pour deux raisons. Parmi les objets qu'on trouve à la référence, c'est d'une part celui qui rappelle le plus le projectile d'étude mais il constitue aussi une moins bonne approximation que d'obtenir le véritable coefficient de drag. En effet, il est deux fois pire que celui d'une sphère et bien pire que celui d'un projectile aérodynamique. Il s'agit donc là d'une approximation sur-estimant l'atténuation causé par la friction de l'air.

La solution à l'équation du mouvement pour la vitesse est:

$$v(t) = \frac{v_0}{\alpha t + 1} \tag{6}$$

où α est simplement le préfacteur de l'équation de force ci-dessus soit $\frac{\gamma C_d A}{2m}$. A est donc l'air du cercle soit $A = \pi r^2$, $c_d = 0.82$ et la masse 0.078kg.

Comme le montre l'équation ci-dessus, le frottement de l'air, en l'absence de toute autre force extérieure, ne pourra pas, à elle seule, avoir raison de la vitesse du projectile. Il faudra en effet un temps infini avant que la vitesse soit nulle.

3 Modèle avec gravité et friction

Pour obetnir la véritable équation du mouvement pour le cas avec frottement, il faut tenir compte du fait que la force de friction est dans la direction opposée à celle du projectile.

Donc pour une première approximation, on peut simplement recalculer:

$$r_x = \frac{v_0}{\alpha t_v + 1} cos(\theta) t_v \tag{7}$$

Dans cette approximation, on considère que le temps de vol lui même n'a pas changé significativement comparativement à la vitesse de l'objet. Autrement dit que la distance selon l'axe $\hat{y}$ n'est pas significativement affectée par le frottement contrairement à la portée.

Une meilleur approximation consiste à calculer un nouveau temps corrigé:

$$t = \frac{v(t)}{g} sin(\theta) + \sqrt{\left(\frac{v(t)}{g} sin(\theta)\right)^2 + \frac{2r_0}{g}} \tag{8}$$

L'équation précédente ne s'inverse pas mais elle peut être résolue numériquement en trouvant le point de croisement entre les deux fonctions $f(t) = t$ et $g(t) = \frac{v(t)}{g} sin(\theta) + \sqrt{\left(\frac{v(t)}{g} sin(\theta)\right)^2 + \frac{2r_0}{g}}$. Une autre approche consiste à remplacer v_0 par $v(t) = \frac{v_0}{\alpha t + 1}$ dans la solution de l'équation du mouvement originale:

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2} g t^2 + v(t) sin(\theta) t + r_0 \hat{y} + v(t) cos(x) t \hat{x} \tag{9}$$

et encore une fois de trouver la valeur de t telle que le terme en y s'annule:

$$0 = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{v_0}{\alpha t + 1} sin(\theta) t + r_0 \tag{10}$$

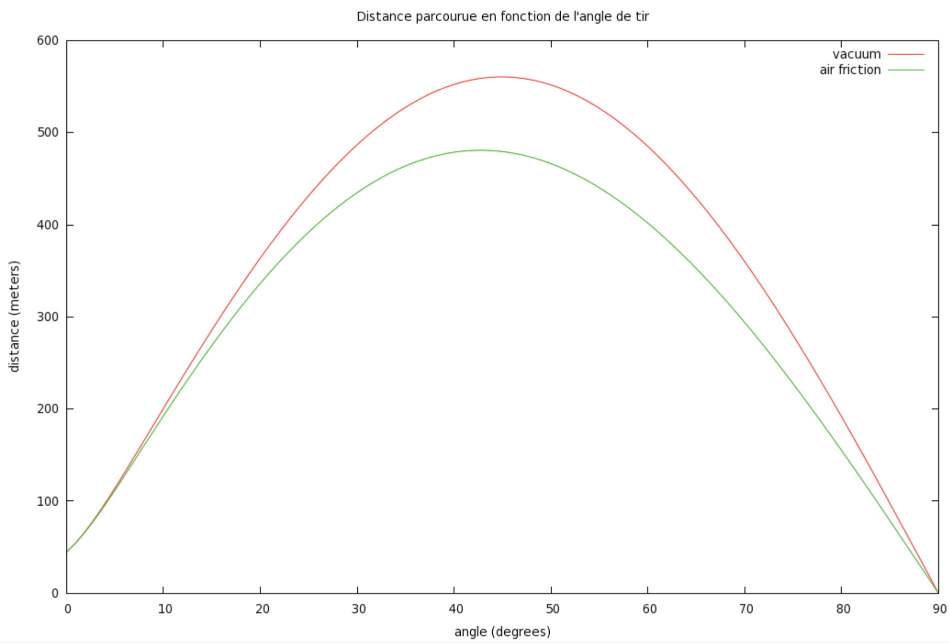
or, le temps t varie entre 0 et 16 secondes pour le cas sans friction et le facteur α vaut environ 0,00792 s^{-1}. Donc une série de Taylor au premier ordre permet de résoudre l'équation corrigée:

$$0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 (1 - \alpha t) sin(\theta) t + r_0 \tag{11}$$

Ce qui donne:

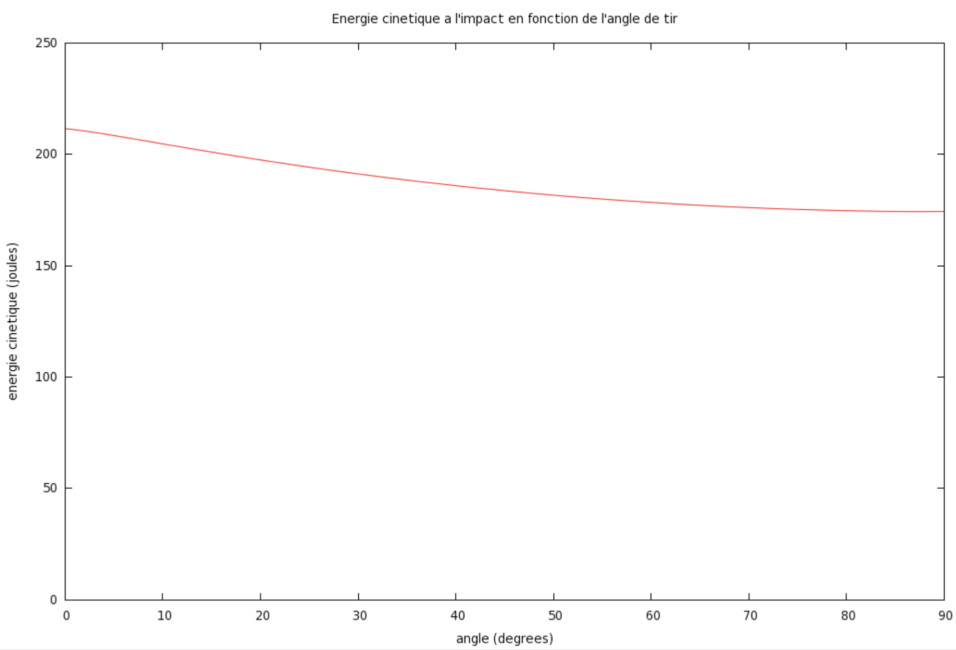
$$t_v^f = \frac{v_0 sin(\theta)}{g + v_0 \alpha sin(\theta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 sin(\theta)}{g + v_0 \alpha sin(\theta)}\right)^2 + \frac{2r}{g + v_0 \alpha sin(\theta)}} \tag{12}$$

La figure montre la différences de portée en fonction de l'angle entre le cas avec et sans friction de l'air. On remarque pour pour les angles de tir typique, la différence de portée effective (entre les deux modèles) est négligeable. Pour le tir droit, on atteint 46m. Pour un angle de 4 degrés et plus, la portée atteint facilement 100m. Pour un angle de 10 degrés, on atteint facilement le double. Pour un angle d'environ 40 degrés, on atteint la porté maximale qui dépasse les 400m.



4 Énergie cinétique

Dans le modèle sans friction, l'énergie est conservée donc peut importe la distance de la cible, l'énergie d'impact sera la même. Mais en tenant compte de la friction, l'énergie à l'impact varie entre 219 et 173J selon l'angle de tir (entre 0 et 90 degrés).


Energie cinetique a l'impact en fonction de l'angle de tir
energie cinetique (joules)
angle (degrees)
0
50
100
150
200
250
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90